

## *Lezione 12*

# Regolatori PID

## Legge di controllo PID

Consideriamo un regolatore che esercita un'azione di controllo dipendente dall'errore attraverso la seguente legge:

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}.$$

La legge di controllo è quindi composta da:

- un'azione **Proporzionale** all'errore;
- un'azione **Integrale** sull'errore;
- un'azione **Derivativa** sull'errore.

Questo tipo di regolatori prende quindi il nome di **PID**. I tre guadagni che compaiono nella legge di controllo vengono chiamati:

$K_P$  : guadagno proporzionale;

$K_I$  : guadagno integrale;

$K_D$  : guadagno derivativo.

Alternativamente, la legge di controllo si può scrivere come segue:

$$u(t) = K_P \left[ e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right],$$

dove:

$$T_I = \frac{K_P}{K_I} : \text{tempo integrale}$$

$$T_D = \frac{K_D}{K_P} : \text{tempo derivativo}$$

---

Tra le ragioni del vastissimo utilizzo dei regolatori PID nella pratica dell'automazione industriale (i PID sono anche detti **regolatori industriali**), ricordiamo:

- *semplicità di realizzazione* in diverse tecnologie (elettronica, idraulica, pneumatica);
- *efficacia* per la regolazione di un'ampia gamma di processi industriali;
- *standardizzazione* con i relativi vantaggi in termini di *affidabilità* e *economicità*;
- *semplicità di taratura* dei parametri;
- possibilità di *taratura automatica* dei parametri, per mezzo di semplici esperimenti.

Dal caso generale della legge di controllo PID è poi possibile derivare altre leggi di controllo, annullando una o più delle azioni di controllo. Sono in particolare di interesse le leggi di controllo:

**P** (proporzionale);

**PD** (proporzionale-derivativa);

**PI** (proporzionale-integrale).

Essendo un sistema dinamico lineare e invariante, il regolatore PID può essere rappresentato da una funzione di trasferimento:

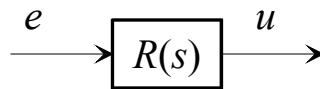


Fig. 1 : Funzione di trasferimento del regolatore PID

$$R(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = K_P \left( 1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right) = \frac{K_P}{T_I} \frac{1 + sT_I + s^2 T_I T_D}{s}$$

Il numeratore di  $R(s)$  è di grado superiore al denominatore: pertanto, così come scritta, la funzione di trasferimento non è fisicamente realizzabile. Ciò corrisponde all'impossibilità di ottenere dall'errore un segnale che ne costituisca in ogni istante la derivata. Per rendere realizzabile l'azione derivativa occorrerà in effetti aggiungere un polo in alta frequenza, per altro di norma irrilevante ai fini della valutazione delle prestazioni del regolatore PID.

Dall'ultima espressione scritta per  $R(s)$  si riconosce che al variare di  $T_I$  e  $T_D$  gli zeri del regolatore possono essere reali o complessi e coniugati. Imponendo la presenza di due zeri reali e distinti, naturalmente nel semipiano sinistro, il diagramma di Bode del modulo di  $R$  assumerà l'andamento tipico riportato in figura:

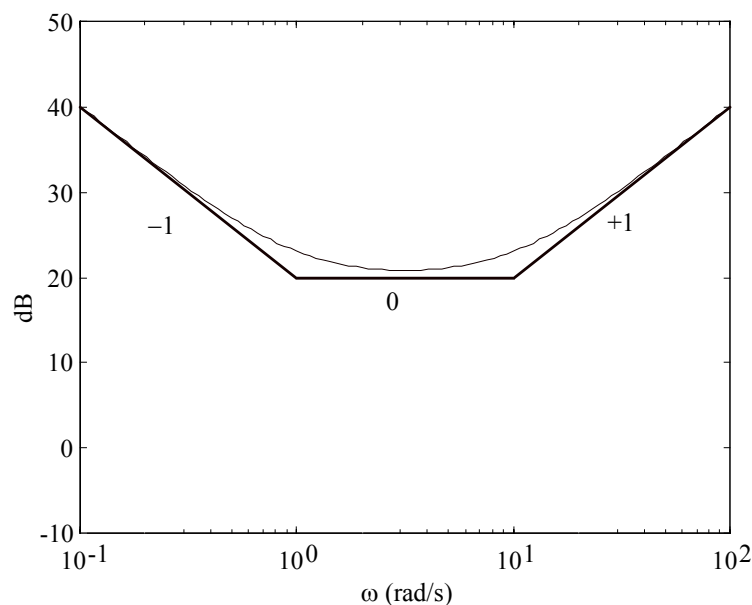


Fig. 2 : Tipico andamento del diagramma di  $|R|$

Il progetto del regolatore PID si riduce quindi alla scelta del guadagno e della posizione degli zeri.

## Taratura analitica dei regolatori PID

Come tutti i controllori, anche il controllore PID può essere progettato sulla base delle tecniche analitiche viste in precedenza, che fanno uso del modello matematico del sistema sotto controllo scritto in forma di funzione di trasferimento. Tuttavia, nel caso del controllore PID, i gradi di libertà nel progetto sono limitati a 3 (il guadagno e due zeri): è allora opportuno procedere in modo più diretto rispetto alla sintesi per tentativi della funzione di trasferimento d'anello già illustrata, selezionando direttamente la posizione degli zeri (tipicamente in modo da cancellare i poli del processo) e scegliendo il guadagno in modo da soddisfare le specifiche dinamiche.

### Esempio

Si consideri lo schema di controllo in figura:

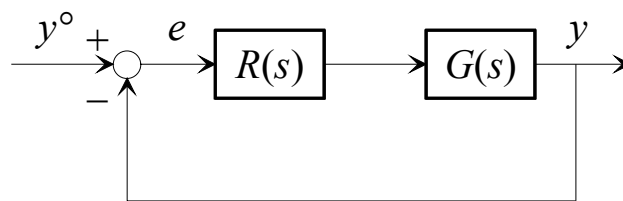


Fig. 3 : Sistema di controllo per l'esempio

dove:

$$G(s) = 0.1 \frac{e^{-3s}}{(1+5s)(1+20s)}$$

Si vuole progettare il regolatore  $R(s)$  nella classe dei regolatori PID in modo tale che:

- $e_{\infty} = 0$  per  $y^{\circ}(t) = sca(t)$ ;
- $\varphi_m \geq 40^{\circ}$
- $\omega_c$  sia la massima possibile.

La specifica statica impone un regolatore di tipo 1, ossia la presenza dell'azione integrale nel regolatore PID. Scritta la funzione di trasferimento come

$$R(s) = \mu_R \frac{(1+sT_1)(1+sT_2)}{s}$$

dove  $\mu_R > 0$  è il guadagno,  $T_1$  e  $T_2$  sono le costanti di tempo degli zeri e si è sottintesa la presenza di un polo in alta frequenza introdotto per rendere realizzabile l'azione derivativa, potremo porre:

$$T_1 = 5, T_2 = 20,$$

in modo da cancellare con gli zeri del regolatore i poli del processo.

Si ottiene quindi la funzione di trasferimento d'anello:

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{0.1\mu_R}{s} e^{-3s}.$$

Come è noto, il diagramma di Bode del modulo associato a  $L$  ha pendenza  $-1$  su tutto l'asse delle pulsazioni, e taglia l'asse in corrispondenza della seguente pulsazione:

$$\omega_c = 0.1\mu_R.$$

La fase critica risulta quindi:

$$\varphi_c = -90^\circ - \omega_c \times \tau \times \frac{180^\circ}{\pi} = -90^\circ - 0.3\mu_R \frac{180^\circ}{\pi}.$$

Imponiamo il vincolo sul margine di fase:

$$\varphi_m = 90^\circ - 0.3\mu_R \frac{180^\circ}{\pi} \geq 40^\circ \Rightarrow \mu_R \leq \frac{50\pi}{0.3 \times 180^\circ} = 2.91.$$

Scegliendo  $\mu_R = 2.9$  si ottiene il regolatore:

$$R(s) = 2.9 \frac{(1+5s)(1+20s)}{s} = 2.9 \frac{100s^2 + 25s + 1}{s} = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s,$$

con

$$K_P = 72.5, K_I = 2.9, K_D = 290.$$

Questo regolatore conferisce al sistema di controllo un margine di fase di circa  $40^\circ$  ed una pulsazione critica di  $0.29$  rad/s.

## Taratura automatica dei regolatori PID

Uno dei vantaggi connessi all'utilizzo dei regolatori PID consiste nella possibilità di effettuare la taratura dei parametri sulla base di semplici prove sperimentali, prescindendo dalla formulazione matematica, non sempre agevole, del sistema sotto controllo.

Tra i numerosi **metodi empirici** per la sintonizzazione dei regolatori PID, ci limitiamo ad accennare ai due tradizionalmente più noti.

### *Metodo di Ziegler e Nichols in anello chiuso*

Il metodo si articola nei seguenti passi:

1. Si chiude l'anello di controllo con il regolatore PID (i cui parametri devono essere sintonizzati), imponendo nulle le azioni integrale e derivativa:  $K_I = 0$ ,  $K_D = 0$ .

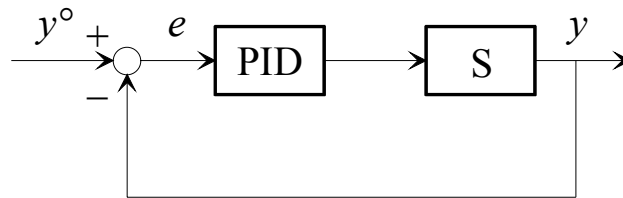


Fig.4 : Sistema in anello chiuso con regolatore PID

2. Partendo da valori molto piccoli di  $K_P$  si effettua un semplice esperimento, consistente nell'applicare un piccolo gradino al segnale di riferimento.
3. Si aumenta progressivamente  $K_P$  ripetendo di volta in volta l'esperimento finché non si instaura nell'anello un'**oscillazione permanente**.

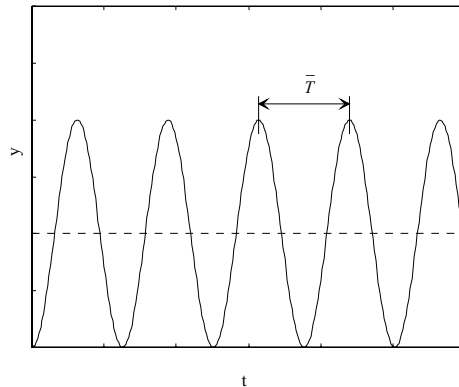


Fig.5 : Oscillazione permanente

4. Detto  $\bar{K}_P$  il valore del guadagno proporzionale corrispondente all'oscillazione permanente (*guadagno critico*) e  $\bar{T}$  il periodo di tale oscillazione, si tarano i parametri di un regolatore **P**, **PI** o **PID** sulla base della seguente tabella:

	$K_P$	$T_I$	$T_D$
<b>P</b>	$0.5 \bar{K}_P$	–	–
<b>PI</b>	$0.45 \bar{K}_P$	$\frac{\bar{T}}{1.2}$	–
<b>PID</b>	$0.6 \bar{K}_P$	$\frac{\bar{T}}{2}$	$\frac{\bar{T}}{8}$

Il metodo non è sempre applicabile: ci sono infatti sistemi che non generano oscillazioni, anche con guadagni proporzionali elevati. Altre volte può essere pericoloso, o comunque sconsigliabile, portare il sistema al limite di stabilità.

### **Metodo di Ziegler e Nichols in anello aperto**

Il metodo si articola nei seguenti passi:

1. Si applica una variazione a scalino all'ingresso del sistema sotto controllo.

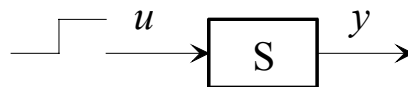


Fig.6 : Perturbazione a scalino

2. Si traccia la tangente alla risposta nel **punto di flesso**:

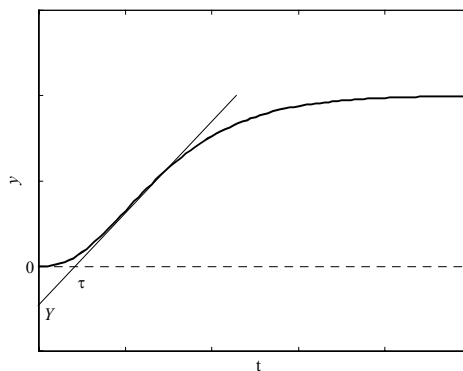


Fig.7 : Metodo della tangente nel punto di flesso

3. Si individuano graficamente le intercette  $\tau$  e  $Y$  della tangente sugli assi  $t$  e  $y$ , rispettivamente.
4. Si tarano i parametri di un regolatore **P**, **PI** o **PID** sulla base della seguente tabella:

	$K_P$	$T_I$	$T_D$
<b>P</b>	$\frac{1}{Y}$	–	–
<b>PI</b>	$\frac{0.9}{Y}$	$3\tau$	–
<b>PID</b>	$\frac{1.2}{Y}$	$2\tau$	$0.5\tau$

Il metodo non è ovviamente applicabile se la risposta allo scalino non presenta flesso o se la risposta presenta oscillazioni. Inoltre non sempre è possibile operare sul processo in anello aperto, o perturbare bruscamente il suo ingresso.



## Esercizi

### **Esercizio 12.1**

Si scriva la legge di controllo nel dominio del tempo del regolatore PID descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

$$R(s) = \mu \frac{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}{s}$$

con:

$$\mu = 5, T_1 = 2, T_2 = 3.$$

### **Esercizio 12.2**

Si supponga di dover sintonizzare un regolatore PID per il controllo di un processo descritto dalla funzione di trasferimento (non nota):

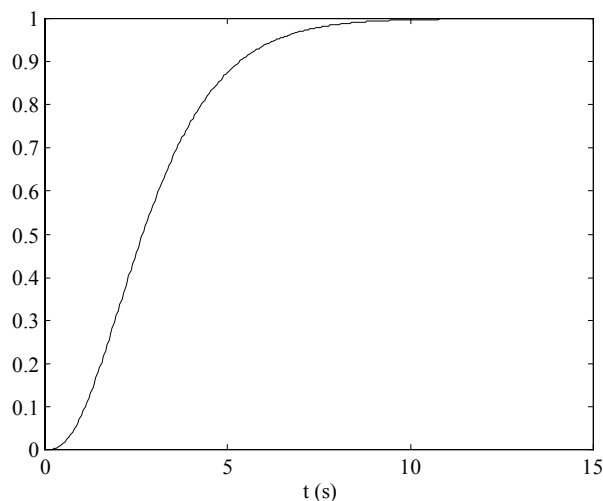
$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^3}.$$

Si determini a quale taratura dei parametri condurrebbero le regole di Ziegler e Nichols in anello chiuso.

Successivamente, si tracci il diagramma di Bode della funzione di trasferimento d'anello risultante dall'applicazione del regolatore PID al processo.

### **Esercizio 12.3**

A partire dalla risposta allo scalino in anello aperto di un processo, riportata in figura, si tarino i parametri di un regolatore PID utilizzando le regole di Ziegler e Nichols in anello aperto.



Successivamente, sapendo che la funzione di trasferimento del processo è la stessa dell'esercizio precedente, si tracci il diagramma di Bode della funzione di trasferimento d'anello risultante dall'applicazione del regolatore PID al processo.

## Traccia delle soluzioni

### Esercizio 12.1

Si ha:

$$R(s) = 5 \frac{(1+2s)(1+3s)}{s} = \frac{5}{s} + 25 + 30s$$

da cui  $K_I = 5$ ,  $K_P = 25$ ,  $K_D = 30$ . La legge di controllo nel dominio del tempo è quindi data da:

$$u(t) = 25e(t) + 5 \int_0^t e(\tau) d\tau + 30 \frac{de(t)}{dt}.$$

### Esercizio 12.2

Si tratta di individuare il valore  $\bar{K}_P$  che rende nullo il margine di fase del sistema di controllo avente funzione di trasferimento d'anello  $L(s) = \bar{K}_P G(s)$ . Il periodo dell'oscillazione si ottiene poi come  $\bar{T} = 2\pi/\bar{\omega}_c$ , essendo  $\bar{\omega}_c$  la pulsazione critica in questa condizione particolare.

Il problema si può facilmente risolvere determinando, ad esempio con il regolo delle fasi, il valore della pulsazione critica tale che ciascuno dei tre poli di  $G$  (coincidenti alla pulsazione 1 rad/s) dia un contributo di fase di  $-60^\circ$ , in modo che la fase critica valga  $-180^\circ$ . Si ottiene  $\bar{\omega}_c = 1.7$ , e quindi  $\bar{T} = 2\pi/\bar{\omega}_c = 3.7s$ . Il guadagno proporzionale critico si ricava valutando di quanto va traslato in alto il diagramma di Bode del modulo di  $G$  per farlo tagliare alla pulsazione  $\bar{\omega}_c$ . Si ottiene  $\bar{K}_P \approx 15dB$ , ossia  $\bar{K}_P \approx 5.6$ . Si osservi che il calcolo di  $\bar{K}_P$  equivale alla determinazione del margine di guadagno associato a  $G$ .

Dalle tabelle si ricava:

$$K_P = 0.6\bar{K}_P = 3.36, \quad T_I = \bar{T}/2 = 1.85, \quad T_D = \bar{T}/8 = 0.46.$$

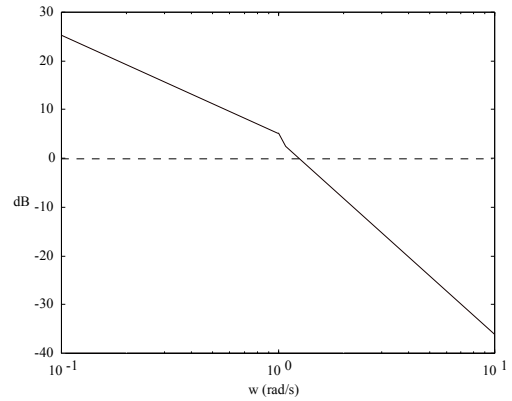
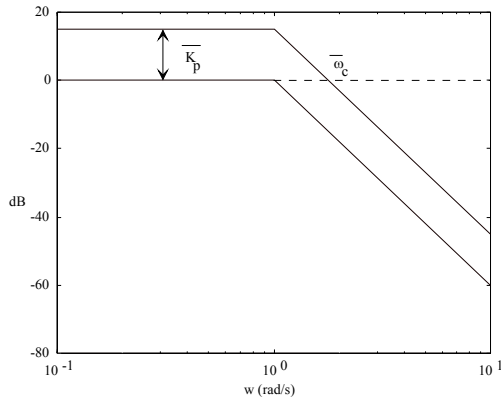
La funzione di trasferimento del PID è quindi (trascurando il polo ad alta frequenza del derivatore):

$$R(s) = K_P \frac{1 + sT_I + s^2 T_I T_D}{sT_I} = 0.6\bar{K}_P \frac{1 + s\bar{T}/2 + s^2 (\bar{T}/2)(\bar{T}/8)}{s(\bar{T}/2)} = 1.2 \frac{\bar{K}_P}{\bar{T}} \frac{(1 + s(\bar{T}/4))^2}{s} = 1.82 \frac{(1 + 0.925s)^2}{s}$$

La funzione d'anello risultante:

$$L(s) = 1.82 \frac{(1 + 0.925s)^2}{s(1+s)^3}$$

ha il diagramma di Bode riportato in figura.



### Esercizio 12.3

Occorre tracciare la tangente nel punto di flesso alla risposta allo scalino ed individuare le intercette con gli assi. Graficamente si ottiene  $Y = 0.21$ ,  $\tau = 0.81$ . Dalle tabelle si ricava:

$$K_P = 1.2/Y = 5.71, \quad T_I = 2\tau = 1.62, \quad T_D = 0.5\tau = 0.40$$

La funzione di trasferimento del PID è quindi (trascurando il polo ad alta frequenza del derivatore):

$$R(s) = K_P \frac{1 + sT_I + s^2T_D}{sT_I} = \frac{1.2}{Y} \frac{1 + 2\tau s + \tau^2 s^2}{2\tau s} = \frac{0.6}{\tau Y} \frac{(1 + \tau s)^2}{s} = 3.53 \frac{(1 + 0.81s)^2}{s}$$

La funzione d'anello risultante:

$$L(s) = 3.53 \frac{(1 + 0.81s)^2}{s(1+s)^3}$$

ha il diagramma di Bode riportato in figura.

